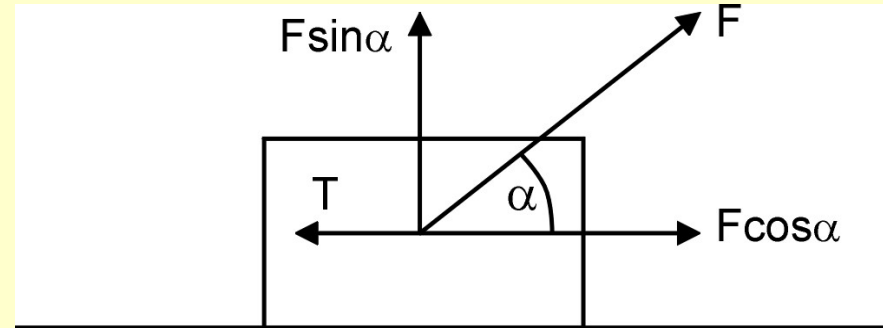


Praca i energia

PRACA

Praca wykonana przez siłę stałą



Definicja

Praca stałej siły jest iloczynem skalarnym siły $\mathbf{F}$ i wektora przesunięcia $\mathbf{s}$

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos \alpha$$

Pracę wykonuje tylko składowa $F_s = F \cos \alpha$ styczna do przesunięcia s

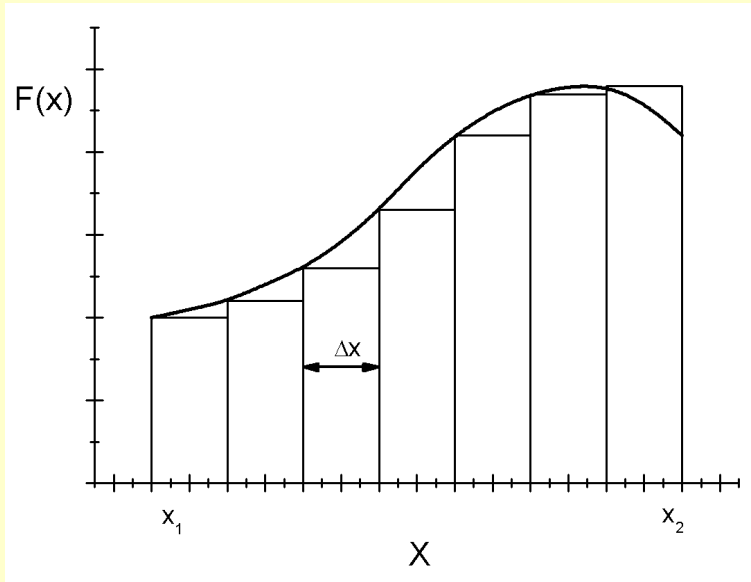
siła tarcia T przeciwstawiająca się ruchowi
($\alpha = 180^\circ$)



$$W = \mathbf{T} \cdot \mathbf{s} = T s \cos 180^\circ = -T s$$

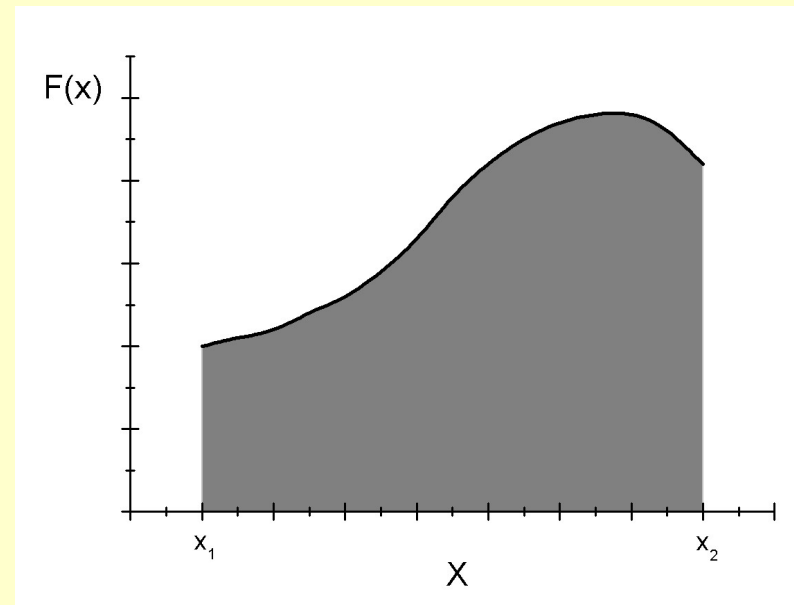
Praca wykonana przez siłę zmienną

Przykład: Zmienna siła $F(x)$ (równoległa do przemieszczenia)

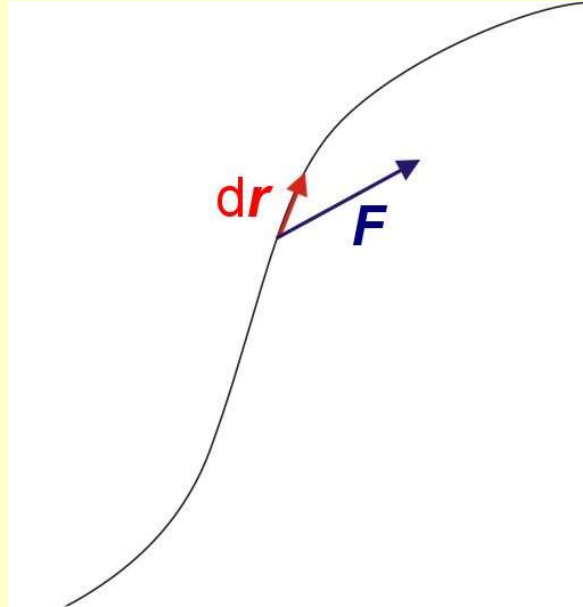


$$\Delta W_i = F_i \Delta x_i$$

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} F_i \Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$



Ogólnie:



praca elementarna :

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

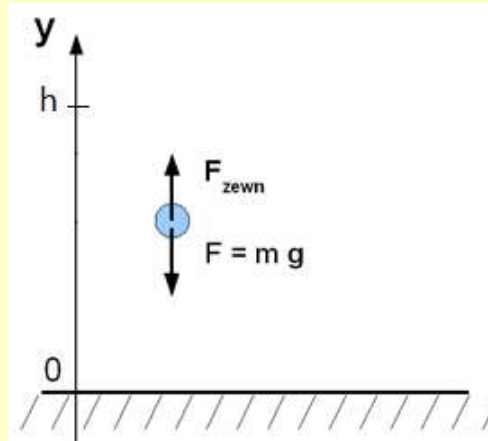
praca :

$$W = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

Jednostką pracy w układzie *SI* jest džul: **J=N m**

Przykłady:

1) Praca w polu siły ciężkości:

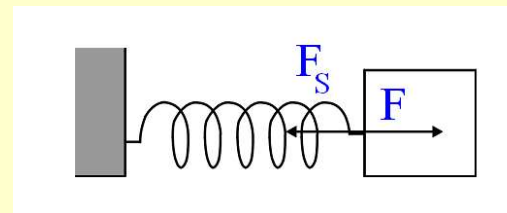


$$W = \int_0^h mg \, dy = mgh$$

2) Praca siły dośrodkowej (prostopadłej do toru):

$$W = 0$$

3) Praca przeciw sile sprężystości:



$$F_s = -kx$$

$$F = kx$$

$$W = \int_0^x F(x') \, dx' = \int_0^x (kx') \, dx' = \frac{kx'^2}{2} \Big|_0^x = \frac{kx^2}{2}$$

Moc

Definicja

Moc definiujemy jako ilość wykonanej pracy do czasu w jakim została ona wykonana.

Moc średnia

$$\bar{P} = \frac{W}{t}$$

dla stałej siły:

$$\bar{P} = \frac{Fs}{t} = F\bar{v}$$

Moc chwilowa

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = F \frac{ds}{dt} = Fv$$

Jednostki

Jednostką mocy w układzie SI jest *wat* (W); $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$.

Dla celów praktycznych jednostką mocy jest *kilowat* (kW),
a jednostką energii (iloczyn mocy i czasu) jest *kilowatogodzina* (kWh).

ENERGIA

Energia kinetyczna

Jest to praca przy rozpędzaniu ciała (przeciw sile bezwładności)

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs = ma \cdot s = ma \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} ma^2 t^2 = \frac{1}{2} mv^2$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Prawa

- 1) Praca wykonana przez siłę **F** działającą na ciało o masie *m* jest równa energii kinetycznej tego ciała.
- 2) Wykonana praca została „zmagazynowana” w postaci ruchu ciała – ciało może oddać tą pracę ale wtedy zmniejszy prędkość.

Jednostki

Jednostką pracy i energii jest w układzie SI *dżul* (J); $1\text{J} = 1\text{N}\cdot\text{m}$.

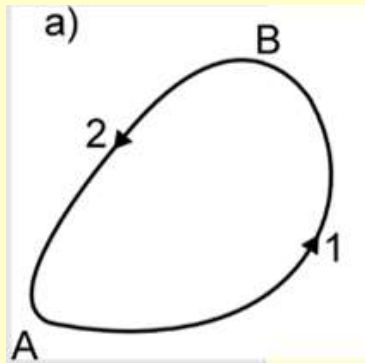
W fizyce atomowej powszechnie używa się jednostki *elektronowolt* (eV);

$1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Siły zachowawcze i niezachowawcze

Definicja

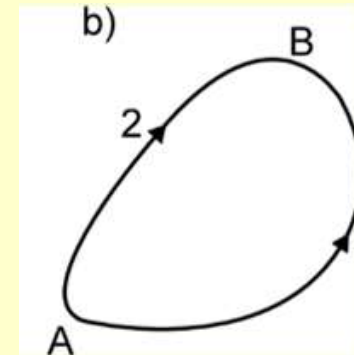
Siła jest zachowawcza, jeżeli praca przez nią wykonana na drodze zamkniętej jest równa zero.



$$W_{A1B} + W_{B2A} = 0$$

lecz: $W_{B2A} = -W_{A2B}$

zatem: $W_{A1B} = W_{A2B}$



Praca wykonana przez siłę zachowawczą **nie zależy** od wyboru drogi łączącej dwa punkty, tylko od ich wzajemnego położenia

Przykłady sił
zachowawczych:

- siła grawitacji
- siła sprężysta
- siła elektrostatyczna

Przykłady sił
niezachowawczych:

- siła oporu powietrza
- siła tarcia

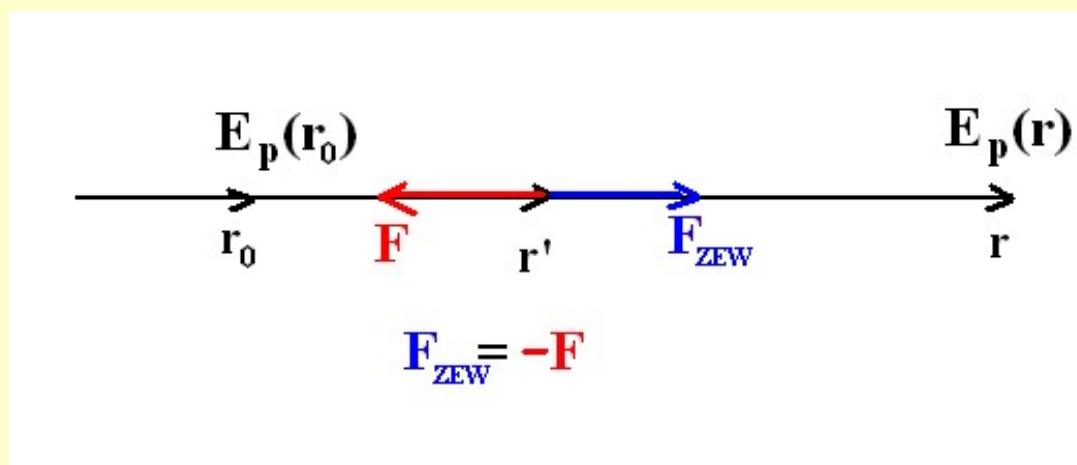
Gdy występuje **opór powietrza** praca wykonywana przez siłę oporu jest ujemna - wykonana praca na zamkniętej drodze jest **różna od zera**

Energia potencjalna

Gdy działają **siły zachowawcze**, można wprowadzić pojęcie **energii potencjalnej** E_p .

Energia potencjalna to **praca zgromadzona** w polu sił zachowawczych.

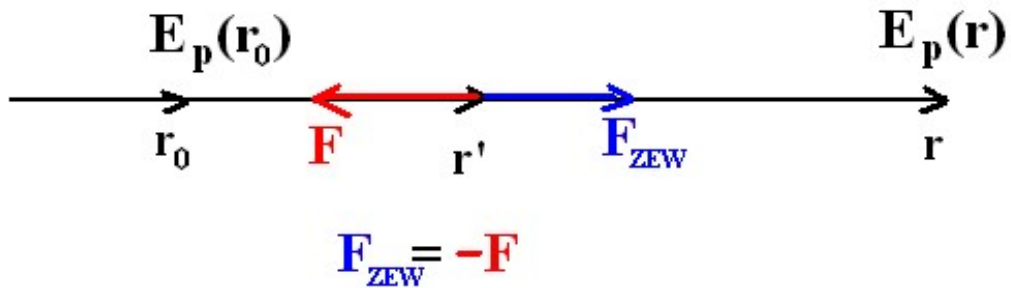
Może być w przyszłości całkowicie odzyskana lub zamieniona na inną użyteczną formę energii.



Energię potencjalną nazywa się **energiją (funkcją) stanu**.

Dla siły zachowawczej F równoważonej przez siłę zewnętrzną F_{zew} :

$$\Delta E_p = W_{F_{zew}} = -W_F$$



$$\Delta E_p = \int_{r_0}^r F_{\text{zew}}(r') dr' = - \int_{r_0}^r F(r') dr'$$

$$E_p(r) = E_p(r_0) + \Delta E_p = E_p(r_0) - \int_{r_0}^r F(r') dr'$$

Zapamiętajmy:

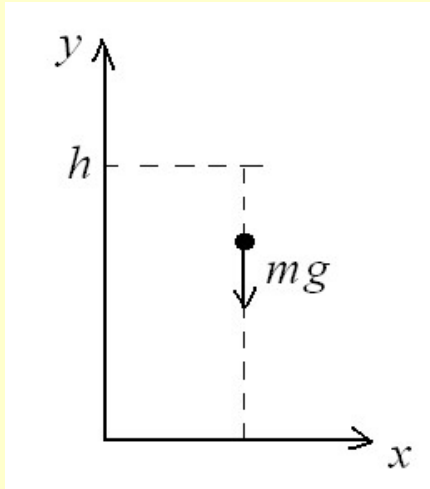
$$E_p(r) = E_p(r_0) - \int_{r_0}^r F(r') dr'$$

Punkt r_0 nazywamy punktem odniesienia.

Zazwyczaj wybieramy go tak, żeby: $E_p(r_0) = 0$

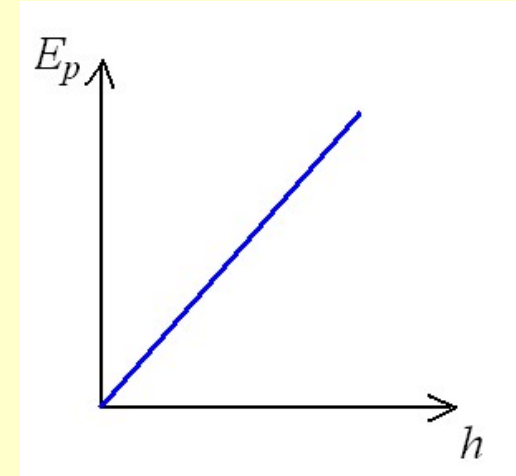
Przykłady :

Energia potencjalna w pobliżu powierzchni Ziemi (punkt odniesienia na powierzchni Ziemi $y_0 = 0$)

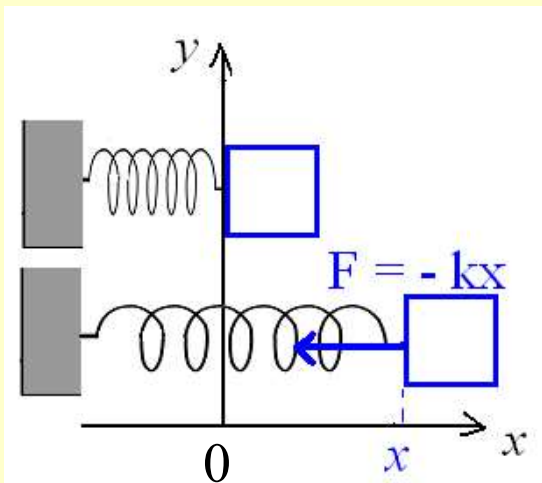


$$E_p(y) = E_p(0) - \int_0^y (-mg) dy' = mgy$$

dla: $E_p(0) = 0$

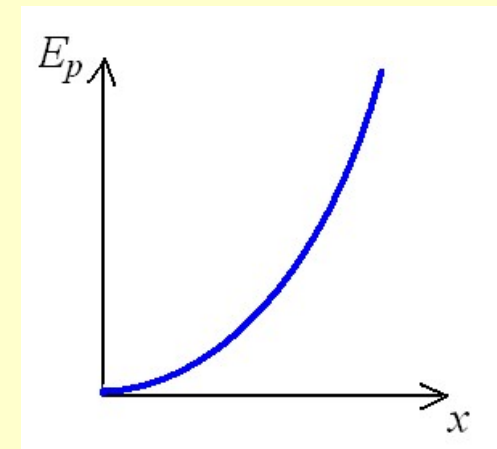


Energia potencjalna sprężyny (punkt odniesienia $x_0 = 0$)

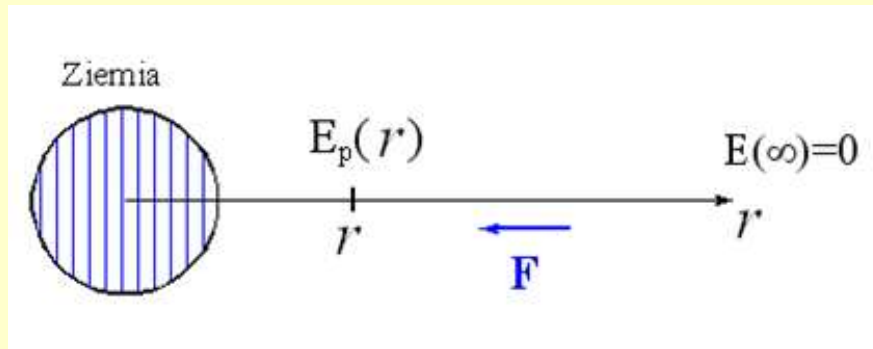


$$E_p(x) = E_p(0) - \int_0^x (-kx') dx' = \frac{1}{2} kx^2$$

dla: $E_p(0) = 0$



Energia potencjalna w dowolnym punkcie nad powierzchnią Ziemi, odległym o r od środka Ziemi



Zerową energię potencjalną przypisujemy punktowi odniesienia w nieskończoności $r \rightarrow \infty$:

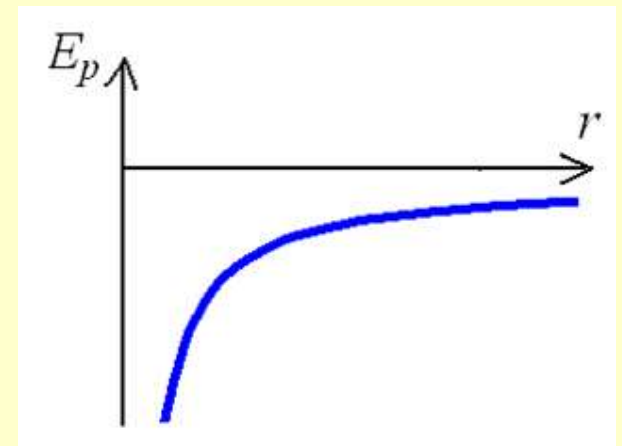
$$E_p(\infty) = 0$$

$$E_p(r) = E_p(\infty) - \int_{\infty}^r F dr' = - \int_{\infty}^r \left(-G \frac{Mm}{r'^2} \right) dr' = GMm \int_{\infty}^r \left(\frac{1}{r'^2} \right) dr'$$

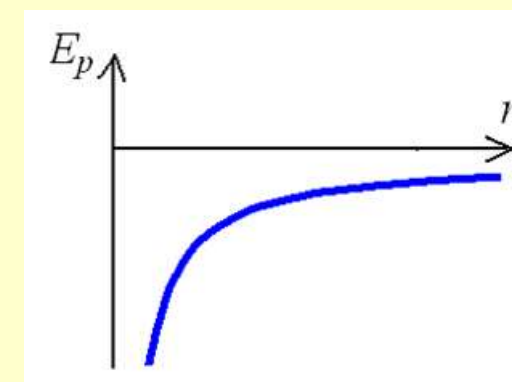
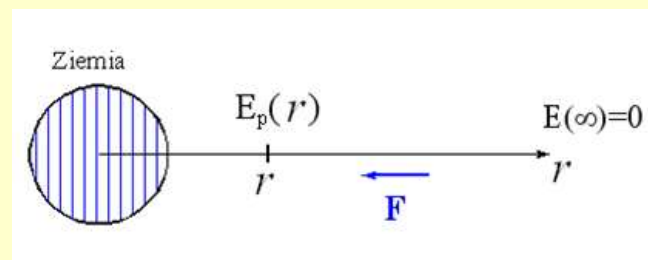
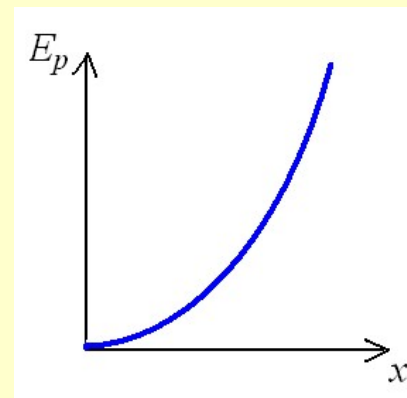
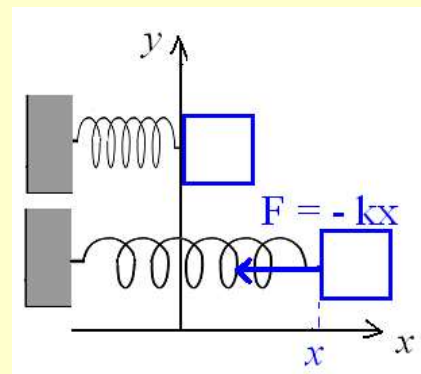
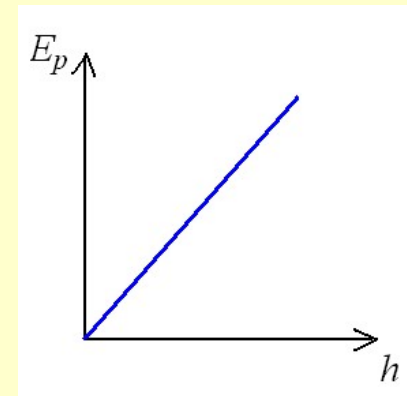
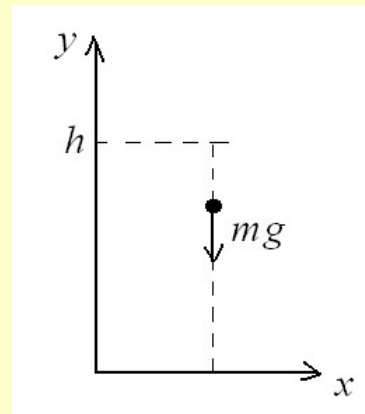
$$= -GMm \frac{1}{r'} \Big|_{\infty}^r = -G \frac{Mm}{r}$$



$$E_p(r) = -G \frac{Mm}{r}$$



Porównanie :



W wielu zagadnieniach użyteczne jest pojęcie **potencjału pola grawitacyjnego** $V(r)$.

Przypomnijmy:

$$E_p(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

Natomiast potencjał grawitacyjny jest to energia potencjalna ciała o jednostkowej masie, a zatem

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{m} = -\frac{GM}{r}$$

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

$$E_k + E_p = \text{const.}$$

Zasada zachowania energii mechanicznej :

Jeśli działa **siła zachowawcza** to suma energii kinetycznej i potencjalnej jest stała.

Jeżeli oprócz siły zachowawczej F_z działa jeszcze siła niezachowawcza F_{nz} (np. tarcie) to:

$$E_k + E_p + U = \text{const.}$$

U - jest energią wewnętrzną

Energia całkowita, ma stałą wartość.

Energia może być przekształcana z jednej formy w inną.

ZASADY ZACHOWANIA DLA UKŁADU ODOSOBNIONEGO (nie działają siły zewnętrzne)

Zasada zachowania pędu :

$$\frac{dp_{\text{cał}}}{dt} = 0 \Rightarrow p_{\text{cał}} = \text{const.}$$

Zasada zachowania energii :

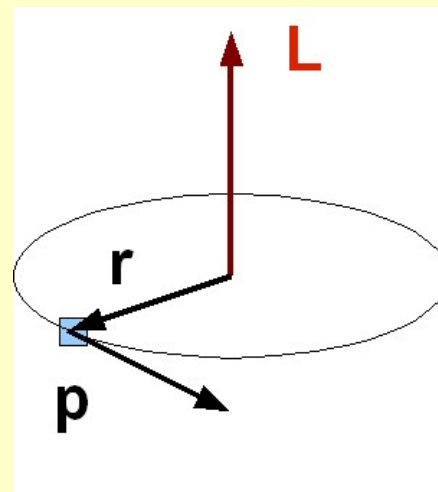
$$\frac{dE_{\text{cał}}}{dt} = 0 \Rightarrow E_{\text{cał}} = E_k + E_p + U = \text{const.}$$

Zasada zachowania momentu pędu :

$$\frac{d L_{\text{cał}}}{d t} = 0 \Rightarrow L_{\text{cał}} = \text{const.}$$

Przypomnienie:
moment pędu:

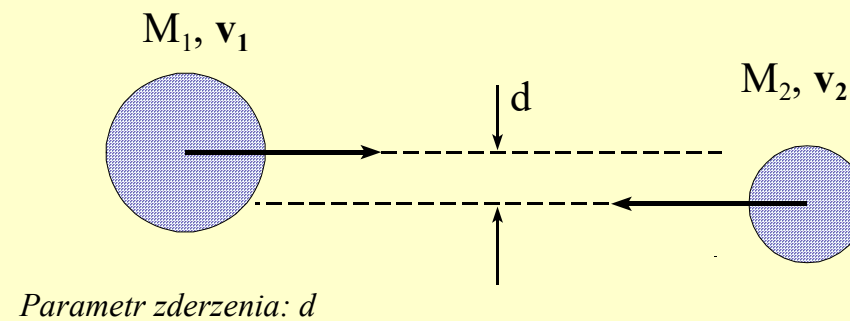
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$



Zderzenia:

- doskonale niesprężyste
- doskonale sprężyste
- inne

- centralne ($d=0$)
- niecentralne ($d \neq 0$)

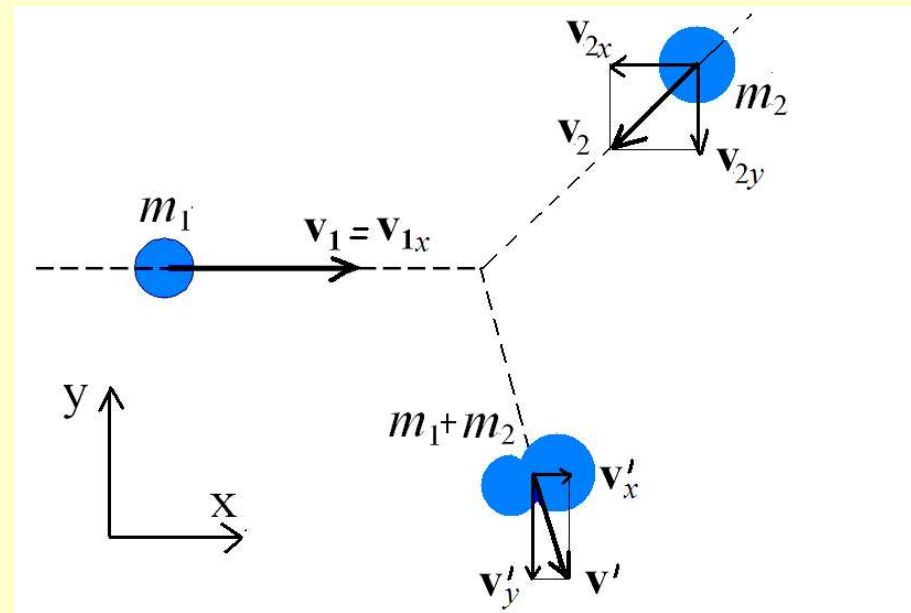


Przykład 1

doskonale niesprężyste:

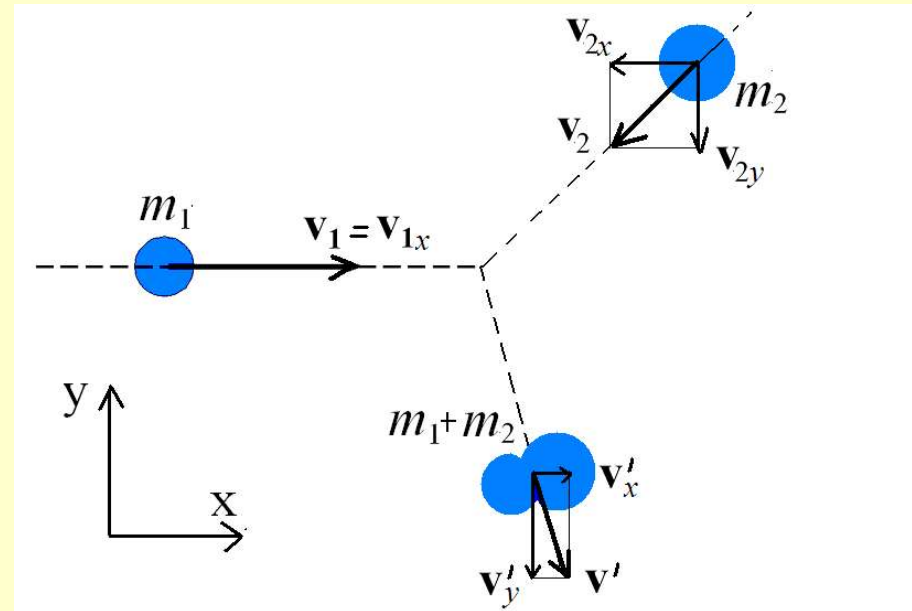
- zas. zach. energii mechanicznej –
- **niespełniona**
- zas. zach. pędu - **spełniona**

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'$$



$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'$$

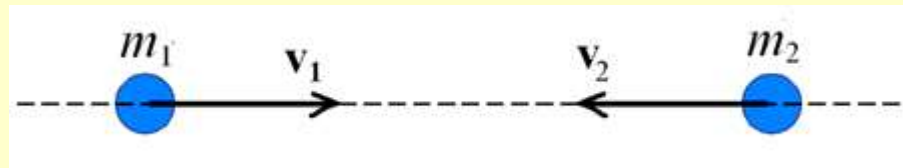
$$\begin{cases} m_1 v_{1x} - m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) v_x' \\ -m_2 v_{2y} = -(m_1 + m_2) v_y' \end{cases}$$



$$\begin{cases} v_x' = \frac{m_1 v_{1x} - m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2} \\ v_y' = \frac{m_2 v_{2y}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

**Uwaga: w równaniach uwzględniono znaki „+” i „-”
dla przykładu pokazanego na rysunku**

Przypadek jednowymiarowy:



$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

jeśli

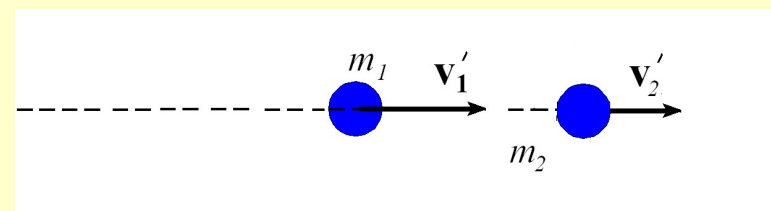
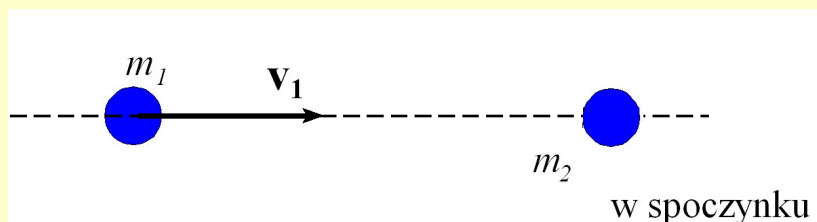
$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$



$$v' = 0$$

Przykład 2

Zderzenie centralne, sprężyste



$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 \end{cases}$$

zas. zach. pędu

zas. zach. energii

$$\begin{cases} v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1} v_1 \\ v_2' = \frac{2m_1}{m_2 + m_1} v_1 \end{cases}$$

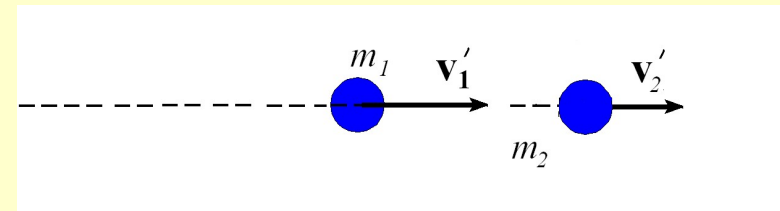
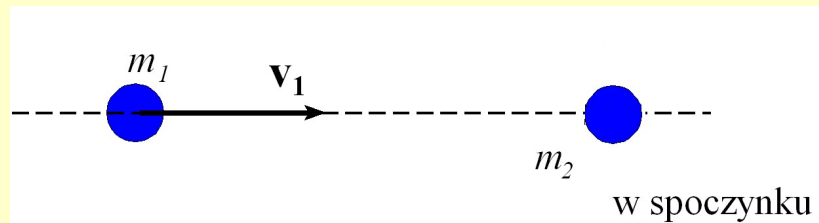
przypadek szczególny gdy $m_1 = m_2 = m$:

$$\begin{cases} v_1' = 0 \\ v_2' = v_1 \end{cases}$$

przypadek szczególny gdy $m_1 \ll m_2$:

$$\begin{cases} v_1' \approx -v_1 \\ v_2' \rightarrow 0 \end{cases}$$

przykład zderzenia centralnego, sprężystego



$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 \end{cases}$$

zas. zach. pędu

zas. zach. energii

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - v_1') = m_2 v_2' \\ m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 (v_2')^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_1 + v_1') \\ (v_1 + v_1') = v_2' \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - v_1') = m_2 v_2' \\ (v_1 + v_1') = v_2' \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1} v_1 \\ v_2' = \frac{2m_1}{m_2 + m_1} v_1 \end{cases}$$

przypadek szczególny gdy $m_1 = m_2 = m$:

$$\begin{cases} v_1' = 0 \\ v_2' = v_1 \end{cases}$$

przypadek szczególny gdy $m_1 \ll m_2$:

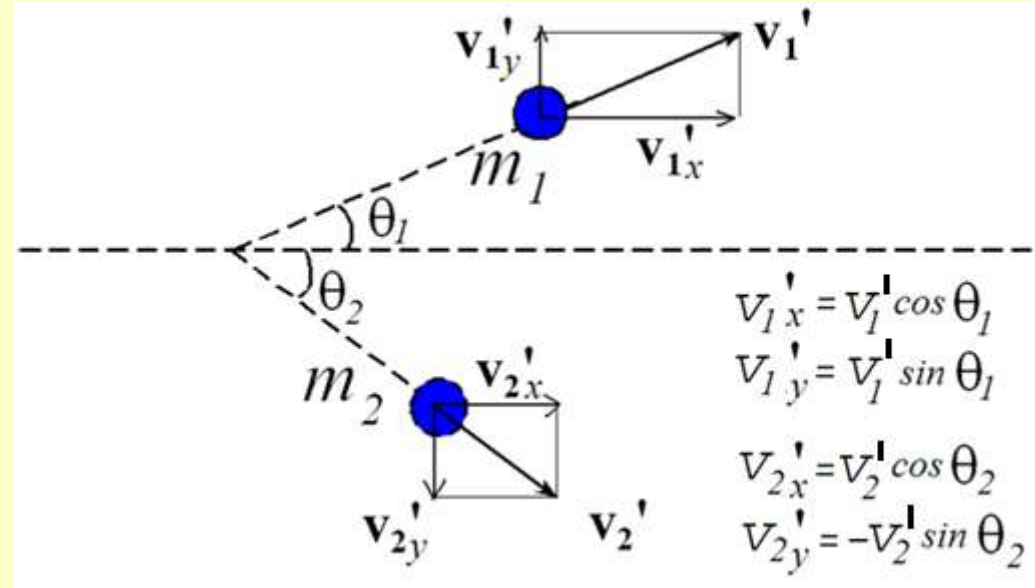
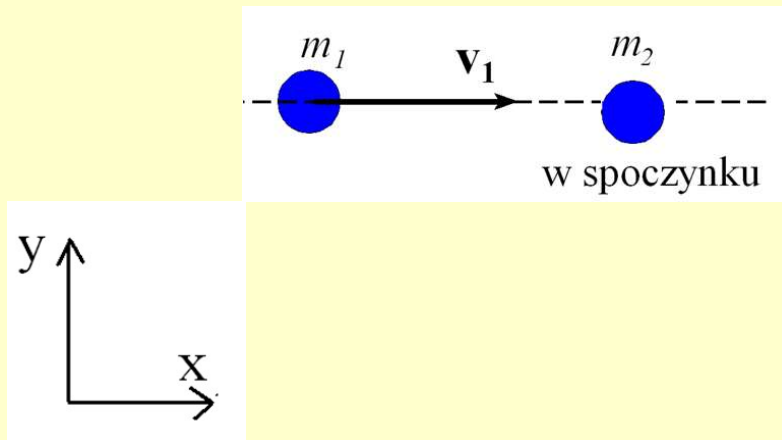
$$\begin{cases} v_1' \approx -v_1 \\ v_2' \rightarrow 0 \end{cases}$$

Przykład 2 doskonale sprężyste:

- zas. zach. energii mechanicznej - **spełniona**

- zas. zach. pędu - **spełniona**

przykład zderzenia niecentralnego:



$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos \theta_1 + m_2 v_2' \cos \theta_2 \\ 0 = m_1 v_1' \sin \theta_1 - m_2 v_2' \sin \theta_2 \end{cases}$$

zas. zach. pędu

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2$$

zas. zach. energii